



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

فصل ۱: مجموعه‌ها

(۱) مجموعه:

مجموعه: به دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز (غیرتکراری) مجموعه می‌گویند.

**نکته:** مجموعه را به صورت آکولاد  $\{ \}$  نشان می‌دهند و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند.

**نکته:** به هریک از اعداد و عبارت داخل مجموعه عضو می‌گویند و علامت عضو بودن به صورت  $\in$  و علامت عضو نبودن به صورت  $\notin$  می‌باشد.

**نکته:** تعداد عضوهای هر مجموعه مانند  $A$  را به صورت  $n(A)$  نشان می‌دهند.

مثال: با توجه به مجموعه‌ی  $A$  درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$A = \{3, \{4, 5\}, 6\}$$

$$n(A) = 4 \quad \times$$

$$3 \in A \quad \checkmark$$

$$4 \notin A \quad \checkmark$$

$$\{6\} \in A \quad \times$$

**مجموعه تهی:** مجموعه‌ای که دارای هیچ عضوی نباشد. علامت مجموعه تهی به صورت  $\{ \}$  یا  $\emptyset$  می‌باشد.

**دو مجموعه برابر:** دو مجموعه  $A$  و  $B$  را برابر می‌گویند که هر عضو مجموعه  $A$  در مجموعه  $B$  و هر عضو مجموعه  $B$  در مجموعه  $A$  وجود داشته باشد.

$$\text{مانند دو مجموعه‌ی مقابل: } B = \left\{ \sqrt{9}, (4)^\circ, \frac{20}{5} \right\} \quad \text{و} \quad A = \{4, 3, 1\}$$

**زیرمجموعه:** مجموعه  $A$  زیرمجموعه  $B$  است هرگاه هر عضو مجموعه  $A$  از مجموعه  $B$  باشد و آن را به صورت  $A \subseteq B$  نشان می‌دهند. اگر  $A$  زیرمجموعه  $B$  نباشد آن را به صورت  $A \not\subseteq B$  نشان می‌دهند.

**نکته:** اگر  $A \subseteq B$  باشد آن‌گاه رابطه‌های مقابل همواره برقرار است:  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$

**نکته:** برای پیدا کردن تعداد زیرمجموعه‌ها از رابطه  $2^n$  استفاده می‌کنیم. اگر تعداد زیرمجموعه را داشته باشیم و تعداد عضو را خواسته باشند عدد داده شده را تجزیه می‌کنیم.

مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای دلخواه مانند  $A$  است؛ یعنی  $\emptyset \subseteq A$

نمایش مجموعه‌ها:

(ب) مجموعه اعداد حسابی:  $W = \{0, 1, 2, \dots\}$

(الف) مجموعه اعداد طبیعی:  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

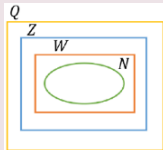
(د) مجموعه اعداد طبیعی زوج:  $E = \{2, 4, 6, \dots\}$

(ج) مجموعه اعداد صحیح:  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

(و) مجموعه اعداد گویا:  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$

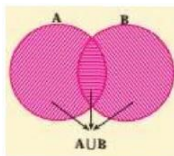
(ه) مجموعه اعداد طبیعی فرد:  $O = \{1, 3, 5, \dots\}$

**نمودار ون مجموعه‌ها:** مجموعه‌ها را می‌توان داخل یک منحنی بسته‌ای نشان داد.



**نکته:** نمودار ون مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است:

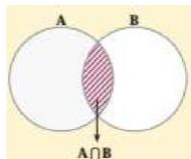
$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$$



**اجتماع دو مجموعه:** اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشند و اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  را به صورت  $A \cup B$  نمایش می‌دهند.

نمودار ون اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$

**اشتراک دو مجموعه:** اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  شامل همه عضوهایی که هم عضو  $A$  و هم عضو  $B$  باشند و اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  را به صورت  $A \cap B$  نمایش می‌دهند.



نمودار ون اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$

**تفاضل دو مجموعه:** مجموعه  $A - B$  (منهای  $B$ ) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه  $A$  باشند ولی عضو مجموعه  $B$  نباشند.



نمودار ون تفاضل دو مجموعه  $A$  و  $B$



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

? مثال: درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۲ و ۳، یک مجموعه‌ی تهی است.

ب) «اعداد طبیعی کوچکتر از صفر» یک مجموعه تهی است.

پ) مجموعه‌ی  $\{\emptyset\}$  هیچ عضوی ندارد.

ت) اجتماع عضوهای دو مجموعه اعداد گویا و گنگ را مجموعه اعداد صحیح می‌گویند.

ث) مجموعه  $A - \emptyset$  همواره زیرمجموعه‌ی، مجموعه‌ی A می‌باشد.

ج) عبارت «سه عدد اول که کمتر از ۱۰ باشند»، یک مجموعه را مشخص می‌کند.

چ) مجموعه  $\{1, 2, 5, 1\}$  دارای ۴ عضو است.

? مثال: جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اشتراک مجموعه اعداد گویا و گنگ برابر با مجموعه ..... است.

ب) یک مجموعه‌ی ۳ عضوی ..... زیر مجموعه دارد.

? مثال: با توجه به دو مجموعه‌ی برابر مقابل، جاهای خالی را کامل کنید.

$$\{5, \dots, 3, -1\} = \{2, \sqrt{25}, \dots, 3\}$$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه‌ی ..... همان دو مجموعه است.

ب) هر یک از دو مجموعه‌ی A و B زیرمجموعه‌ی ..... است.

پ) اشتراک دو مجموعه‌ی A و B ..... هر یک از دو مجموعه‌ی A و B است.

ت) مجموعه‌ی  $A - B$  زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی ..... است.

ث) اجتماع دو مجموعه‌ی  $(A \cap B)$  و  $(B - A)$  با مجموعه‌ی ..... مساوی است.

? مثال: اگر  $A = \{5, 6, 7\}$  و  $B = \{7, 8, 9\}$  باشند، هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایش بنویسید.

الف)  $A \cap B =$

ب)  $A - B =$

? مثال: مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 3, 5\}$  را در نظر بگیرید و سپس مجموعه زیر را با عضوهایش مشخص کنید.

$(A \cup \emptyset) - (B \cap A) =$

? مثال: عضوهای مجموعه مقابل را مشخص کنید.  
 $D = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, -2 \leq x < 3\}$

? مثال: اگر  $A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$  و  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  باشد، مجموعه‌ی  $A \cap B$  را با عضوهایش مشخص کنید.

? مثال: با توجه به مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{2, 4, 6\}$  و  $C = \{1, 7, 9\}$ ، مجموعه زیر را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید.

$(A \cup B) - C =$

? مثال: نمایش عددی مجموعه E را بنویسید.  
 $E = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} =$

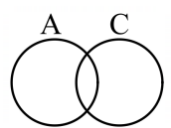
? مثال: تمام زیرمجموعه‌های مجموعه  $M = \{1, 2\}$  را بنویسید.

? مثال: اگر مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  و B زیر مجموعه‌ای از A باشد، حداقل تعداد اعضا B کدام است؟

? مثال: درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید:

اگر  $A = \{5, 6\}$  و  $B = \{5, 7\}$  باشد، آن‌گاه  $n(A \cup B) = 4$  است.

? مثال: در شکل مقابل:

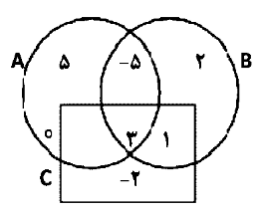


الف) در شکل مقابل مجموعه  $(A - C) \cup C =$  را هاشور بزنید.

ب) عبارتی بنویسید که نشان دهنده مجموعه تهی باشد.

? مثال: با توجه به نمودار «ون» مقابل، مجموعه‌های زیر را با اعضایش مشخص کنید.

$A - B = \{ \quad \quad \quad \}$        $(A \cap B) \cap C = \{ \quad \quad \quad \}$



## ۲) احتمال:

برای به دست آوردن احتمال هر پیشامد از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد تمامی حالت‌های ممکن}} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

فضاهای نمونه‌ای معروف:

n سکه:  $2^n$

n تاس:  $6^n$

خانواده n فرزندی:  $2^n$

انتخاب ۱ مهره از بین n مهره: n

? مثال: اگر تاسی را ببندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:

(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد رو شده اول باشد.

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

? مثال: در پرتاب دو تاس احتمال‌های زیر را بدست آورید:

(الف) احتمال آمدن این که تاس اول عدد فرد و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ بیاید.

(ب) احتمال آمدن این که مجموع هر دو عدد تاس ۶ شود.

? مثال: اگر دو تاس را همزمان پرتاب کنیم مجموعه همه حالت‌های ممکن آن چند تا است؟

احتمال اینکه هر دو عدد رو شده مضرب ۵ باشند را بنویسید.

مثال: ۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد؟

? مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز و ۲ مهره آبی وجود دارد. اگر یک مهره را به صورت تصادفی از این جعبه خارج کنیم، احتمال‌های زیر چقدر است؟

(الف) این مهره قرمز باشد.

(ب) این مهره سبز یا آبی باشد.

? مثال: در خانواده‌ای که ۲ فرزند دارد، چقدر احتمال دارد هر دو فرزند پسر باشند؟

? مثال: ۶ کارت یکسان با حروف الفبای فارسی داریم.



پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم: «حرف روی کارت حداقل دو نقطه داشته باشد» ابتدا مجموعه A را تشکیل دهید و سپس احتمال رخ دادن آن را بدست آورید.

A مجموعه = .....

احتمال = .....



(۱) اعداد گویا:

اعداد گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نکته: اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می‌دهند:

جمع و تفریق اعداد کسری: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان [ک.م.م] مخرج‌ها است.

$$\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{18}\right) = \frac{-15+14}{36} = -\frac{1}{36} \quad \text{مخرج‌ها [ک.م.م] مخرج‌ها } \Rightarrow [12, 18] = 36$$

مانند:

ضرب اعداد کسری: فقط در ضرب می‌توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت‌ها در هم و مخرج‌ها در هم ضرب می‌شود.

$$\left(-\frac{5}{12}\right) \times \left(-\frac{7}{18}\right) = +\frac{1}{8}$$

مانند:

تقسیم اعداد کسری: تقسیم به ضرب تبدیل می‌شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می‌شود)

$$\left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{21}{5}\right) = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}$$

مانند:

مقایسه کسرها: از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) هم‌مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال: کسره‌های زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{8}{20}, \frac{15}{20}, \frac{10}{20}, \frac{14}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4} \quad (2, 4, 5, 10) = 20$$

ب) تبدیل به عدد اعشار: (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می‌دهیم).

مثال: کسره‌های زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{2}{5} = 0.4, \quad \frac{3}{4} = 0.75, \quad \frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{7}{10} = 0.7 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

پیدا کردن کسرهایی بین دو عدد کسری: چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است:

(۱) صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم جمع می‌کنیم.

(۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

تبدیل کسر به اعداد اعشاری:

(۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم: اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود، آن کسر مختوم نام دارد.

$$\frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{و} \quad \frac{6}{5} = 1.2 \quad \text{مانند:}$$

(۲) عددهای اعشاری متناوب ساده: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می‌گویند.

مانند: (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است)

$$\frac{5}{11} = 0.454545\ldots = 0.\overline{45} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} = 0.333333\ldots = 0.\overline{3}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

$$\frac{3}{77} \quad 77 = 7 \times 11$$

$$\text{و} \quad \frac{6}{13}$$

مانند:

(۳) عددهای اعشاری متناوب مرکب: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم‌های تکراری برسند به آن

کسر متناوب مرکب می‌گویند.

$$\frac{5}{6} = 0.833333\ldots = 0.8\overline{3} \quad \text{و} \quad \frac{7}{22} = 0.318181818\ldots = 0.3\overline{18}$$

مانند:

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشد آن کسر متناوب مرکب است.

$$\frac{5}{14} \quad 14 = 2 \times 7$$

$$\text{و} \quad \frac{2}{75} \quad 75 = 3 \times 5^2$$

مانند:

? مثال: بین  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  یک کسر بنویسید.

? مثال: عدد ..... بین دو عدد  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{7}$  قرار دارد.

? مثال: کسرهای زیر را مقایسه کنید.

(الف)  $\frac{21}{32} \bigcirc \frac{19}{27}$

(ب)  $\frac{15}{17} \bigcirc \frac{11}{13}$

? مثال: مقدار را به ساده‌ترین حالت ممکن بنویسید.

$$\frac{17}{12} - \frac{15}{24} + \frac{11}{32} =$$

? مثال: درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(الف) عدد  $1/05$  یک عدد اعشاری مختوم است.

(ب) عددی گویا بین دو عدد گویای  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  می‌باشد.

? مثال: جای خالی را پر کنید.

(الف) کسر  $\frac{2}{3}$  نمایش اعشاری ..... دارد. (متناوب - مختوم)

(ب) نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{5}$  ، ..... است.

? تست: نمایش اعشاری کدام کسر به صورت مختوم است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{1}{6}$       (۴)  $\frac{1}{7}$

? تست: نمایش اعشاری  $\frac{11}{3}$  به صورت کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱)  $3/666000$       (۲)  $6/3$       (۳)  $3/6$       (۴)  $3/66$

اعداد گنگ یا اصم: اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها نامتناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

**نکته:** مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی  $Q'$  یا  $Q^c$  نشان می‌دهند.

**نکته:** اگر  $n$  مربع کامل نباشد آن‌گاه  $\sqrt{n}$  عددی گنگ است. (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

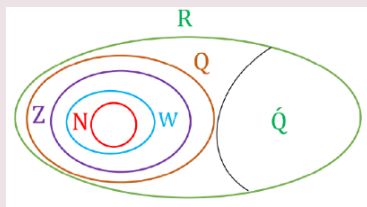
**نکته:** عدد  $\pi$  چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. (عدد  $\pi$  تا ۱۰ رقم اعشار:  $\pi = 3.1415926535$ )

**نکته:** بین دو عدد بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

**اعداد حقیقی:** اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهد:  $Q \cup Q' = R$

**نکته:** مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی  $R$  نشان می‌دهند.

**نکته:** نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی ( $N$ ) و اعداد حسابی ( $W$ ) و اعداد صحیح ( $Z$ ) و اعداد گویا ( $Q$ ) و اعداد گنگ ( $Q'$ ) و اعداد حقیقی ( $R$ ) به صورت زیر است:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R, \quad Q' \subseteq R$$

**نمایش اعداد حقیقی روی محور:** چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره توخالی قرار می‌دهیم).

بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
$(a, b)$	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	
$(-\infty, a)$	$\{x \in R \mid x < a\}$	
$(-\infty, a]$	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	
$(a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x > a\}$	
$[a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

مثال: درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد  $\frac{3}{14}$  یک عدد گنگ است.

ب) اجتماع عضوهای دو مجموعه اعداد گویا و گنگ را مجموعه اعداد صحیح می‌گویند.

مثال: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

بین اعداد  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  ..... عدد گنگ وجود دارد.

مثال: بین دو عدد  $\sqrt{20}$  و ۵ یک عدد گنگ بنویسید.

مثال: عدد  $2 + \sqrt{3}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

مثال: دو عدد گنگ مثال بزنید که حاصلضرب آنها گویا باشد.

مثال: طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

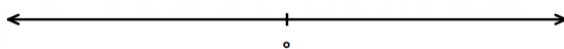
$$(R - Q) \cap N =$$

تست: کدام گزینه درست است؟

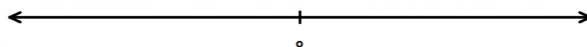
- ۱)  $Q \cup Z = \emptyset$       ۲)  $N \cup Q = N$       ۳)  $N \cup Z = Z$       ۴)  $Q \cap Z = Q$

مثال: مجموعه‌ی داده شده را روی محور نمایش دهید.

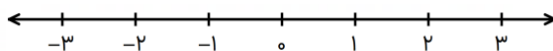
$$A = \{x \in R \mid -3 \leq x < 1\}$$



مثال: نمودار مجموعه  $A = \{x \mid x \in R, -3 < x \leq 2\}$  را روی محور نمایش دهید.

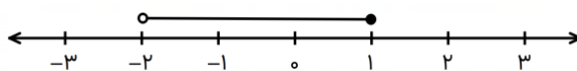


مثال: مجموعه‌ی  $A = \{x \in R \mid x \leq 2\}$  را روی محور نشان دهید.

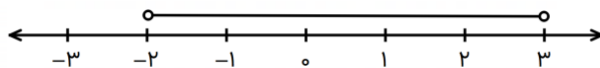


مثال: با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$



مثال: با توجه به محور، مجموعه‌ی متناظر را بنویسید.



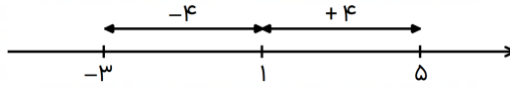


(۳) قدر مطلق:

قدر مطلق: فاصله‌ی نقطه نمایش یک عدد مانند  $a$  را از مبدأ مختصات قدر مطلق  $a$  می‌نامیم و آن را به صورت  $|a|$  نشان می‌دهیم.

پس وقتی می‌گوییم  $|x - 1| = 4$  یعنی:

فاصله عددی از عدد ۱ برابر ۴ است و می‌توان گفت:



$$\Rightarrow |x - 1| = 4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

$$x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3$$

خواص قدر مطلق:

$$1) |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$2) |x| = |-x|$$

$$3) |x| = a \xrightarrow{a > 0} x = \pm a$$

$$4) \sqrt{x^2} = |x|$$

$$5) |x^y| = |x|^y = x^y$$

$$|3 - \sqrt{11}| =$$

? مثال: عبارت زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

$$|4 + \sqrt{7}| + |\sqrt{7} - 8| =$$

? مثال: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} =$$

? مثال: حاصل عبارت مقابل را به کمک قدرمطلق بدست آورید.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{10} =$$

? مثال: حاصل عبارت روبه‌رو را بدست آورید.

$$|3a + b| =$$

? مثال: اگر  $a = -5$  و  $b = 10$  باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$2|a| + |a + b| =$$

? مثال: اگر  $b = 5$  و  $a = -2$  باشد، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$|a + b| + |a| - |b| =$$

? مثال: اگر  $a < 0 < b$  و  $|a| > |b|$  باشد، حاصل عبارت زیر را به شکل ساده بنویسید.



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه

(۱) استدلال:

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است.  
اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می‌گوییم.  
مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

**نکته:** همواره برای اثبات یک مسئله نمی‌توان از رسم شکل یا شهود استفاده کرد زیرا ممکن است خطای دید در آن شکل وجود داشته باشد.

**فرض مسئله:** اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده‌های مسئله)  
**حکم مسئله:** خواسته‌های مسئله را حکم مسئله می‌گویند.

(۲) هم‌نهشتی مثلث‌ها:

**هم‌نهشتی مثلث‌ها:** دو مثلث به سه حالت هم‌نهشت هستند:

(الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض)

(ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز)

(ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

**نکته:** سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت‌های هم‌نهشتی نیست.

**هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه:** دو مثلث قائم‌الزاویه به دو حالت هم‌نهشت هستند:

(الف) وتر و یک زاویه تند (و ز)

(ب) وتر و یک ضلع (و ض)

**نکاتی درباره هم‌نهشتی دو مثلث:**

(الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

(ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به رأس هستند.

(ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می‌کنیم.

(د) در مثلث متساوی‌الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

(ه) در مثلث متساوی‌الساقین دو ساق و دو زاویه‌ی مجاور قاعده برابرند.

**نکته:** در دو مثلث هم‌نهشت اضلاع و زاویه‌های متناظر برابرند.

مثال: برای رد کردن عبارت «محل برخورد هر دو ارتفاع از هر مثلث دلخواه، درون مثلث قرار دارد» از ..... استفاده می‌کنیم.

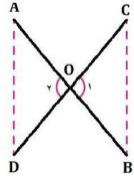
مثال: برای هر یک از مسئله‌های زیر یک مثال نقض بزنید:

الف) تمام اشکال هندسی گوشه یا زاویه دارند. (ب) تمام اعداد زوج اول هستند؟

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه‌های روبه‌رو لوزی برابرند. (ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند.

مثال: در اثبات زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

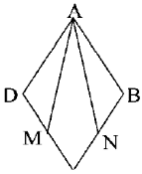


دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطه O نصف کرده‌اند. نشان دهید:  $AD = BC$

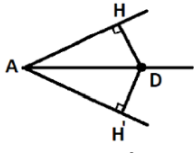
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow \dots = \dots$$

بنا به حالت

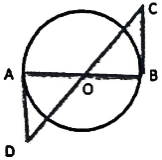
مثال: در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ADM و ABN را با ذکر حالت بیان کنید.



مثال: در شکل مقابل نیمساز زاویه A رسم شده است. ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

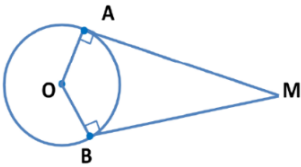


مثال: در شکل زیر O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره مماس‌اند. دو مثلث OAD و OBC بنا به چه حالتی هم‌نهشت هستند؟



$$\left. \begin{array}{l} \dots = \dots \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \rightarrow \triangle OAD \cong \triangle OBC$$

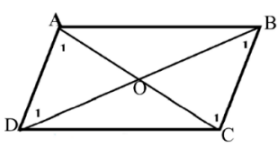
مثال: با توجه به شکل، نقطه O مرکز دایره است. نشان دهید دو خط مماس و با هم مساویند.



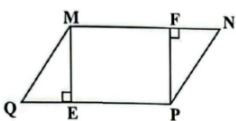
حکم	$\dots = \dots$
فرض	$OA = OB$ و $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{array} \right. \Rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \overline{BM} = \overline{AM}$$

حالت هم‌نهشتی (.....)

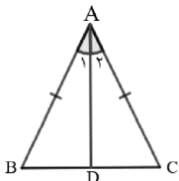


مثال: دانش‌آموزی رای اثبات عبارت «در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند» شکل مقابل را رسم کرد. اثبات او را کامل کنید.



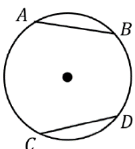
مثال: در شکل زیر چهارضلعی MNPQ، متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید دو مثلث MEQ و NFP هم‌نهشت هستند.

مثال: در شکل مقابل: «مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویه A است. ثابت کنید AD میانه است.»



$$\left. \begin{array}{l} \dots = \dots \\ AD = AD \text{ ضلع مشترک} \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حالت}} \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow \dots = \dots$$

مثال: در شکل زیر وترهای AB و CD با هم مساوی هستند. نشان دهید کمان‌های AB و CD مساوی هستند.



## ۳) دو شکل متشابه:

دو شکل متشابه: دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه‌ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می‌گویند.

**نکته:** دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه هستند.

**نکته:** دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکنند)

**نکته:** دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه‌ها دو به دو برابر نباشند)

**نکته:** نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می‌گویند.

**نکته:** دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آنها عدد یک است.

**نکته:** در دو مثلث متشابه :

الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

مثال: درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) هر دو مربع دلخواه متشابه‌اند.

ب) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه هستند.

مثال: نسبت تشابه دو شکل هم‌نهشت، عدد ..... است.

مثال: آیا هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند؟ چرا؟

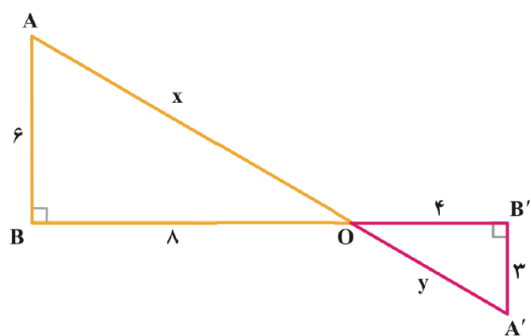
مثال: مقیاس نقشه‌ای  $\frac{1}{1000}$  است. اگر فاصله دو نقطه روی نقشه  $\frac{1}{5}$  سانتی‌متر باشد، فاصله دو نقطه در طبیعت چقدر است؟

مثال: دو تابلو فرش در یک موزه قرار دارد. اگر نسبت تشابه آن‌ها  $\frac{1}{3}$  باشد و ابعاد تابلو فرش کوچکتر  $\frac{1}{5}$  در  $1$  باشد، ابعاد تابلو فرش بزرگتر چقدر است؟



مثال: اگر اندازه‌ی یکی از زاویه‌های روی نقشه  $40^\circ$  درجه باشد اندازه این زاویه در واقعیت چند درجه است؟

مثال: مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع  $x-1$  و  $10$  و  $x+7$  با هم متشابه‌اند. (اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار  $x$  را پیدا کنید.



مثال: در شکل زیر:

الف) مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید (به کمک قضیه فیثاغورث)

ب) آیا دو مثلث ABO و A'B'O متشابه‌اند؟ چرا؟



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

فصل ۴: توان و ریشه

(۱) توان صحیح:

توان: اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه‌نویسی از توان استفاده می‌شود.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 \begin{array}{l} \nearrow \text{توان} \\ \searrow \text{پایه} \end{array}$$

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^n$$

مانند:

خواص توان:

۱)  $a^0 = 1$

۲)  $a^1 = a$

۳)  $a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$

۴)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

۵)  $a^x \times a^y = a^{x+y}$

۶)  $a^x \div a^y = a^{x-y}$

۷)  $a^x \times b^x = (ab)^x$

۸)  $a^x \div b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

۹)  $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

(۲) نماد علمی:

نماد علمی: برای محاسبه ساده‌تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن‌ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می‌نویسیم.

**نکته:** به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت  $a \times 10^n$  است که در آن  $1 \leq a < 10$  و  $n$  عدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم‌های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می‌نویسیم.

رقم ۸  
 $341000000 = 341 \times 10^8$

رقم ۴  
 $1475293 \div 913 = 1.475293 \times 10^6$

مانند:

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی): ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم‌های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می‌نویسیم.

رقم ۶  
 $0.000037 = 37 \times 10^{-6}$

$0.00678 = 6.78 \times 10^{-3}$

مانند:

(۳) ریشه‌گیری:

الف) ریشه دوم اعداد: هر عدد دارای دو ریشه دوم است: (یکی مثبت و دیگری منفی)

$4^2 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$  و  $-4$

(ریشه‌های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و -۴)

مثال: ?

**نکته:** اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ‌وقت منفی نمی‌شود)

ب) ریشه سوم اعداد: هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

**نکته:** اگر  $a$  یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت  $\sqrt[3]{a}$  نشان می‌دهیم.

فرجه یا ریشه  
 $3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

و

$(-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$

مانند:



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

مثال: حاصل  $xy^{-3}$  برابر است با ..... (  $\frac{x}{y^3}$  یا  $\frac{1}{xy^3}$  ) ؟

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت تواندار بنویسید. ؟

مثال: حاصل عبارت مقابل را به صورت یک عدد تواندار بنویسید. ؟

مثال: حاصل را به صورت عدد تواندار بنویسید. ؟

مثال: مقدار  $x$  را بدست آورید. ؟

مثال: نمایش عدد  $37400$  به صورت نماد علمی، ..... است. ؟

مثال: نماد علمی عدد مقابل را بنویسید. ؟

تست: نمایش اعشاری عدد  $5/2 \times 10^{-3}$  کدام است؟ ؟

۵۲۰۰۰ (۴)

۰/۰۰۰۵۲ (۳)

۵۲۰۰ (۲)

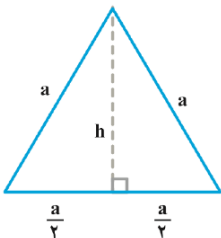
۰/۰۰۵۲ (۱)

مثال: درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ؟

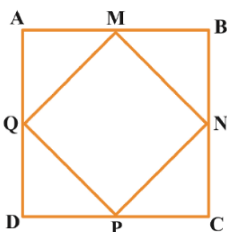
الف) عدد  $-\frac{1}{8}$ ، دو ریشه سوم دارد.

ب) حاصل  $\sqrt[3]{-27}$  برابر ..... است.

مثال: شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان می‌دهد. اندازه‌ی ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  بدست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب  $a$  بنویسید. ؟



مثال: نقاط  $M, N, P, Q$  وسط‌های اضلاع مربع  $ABCD$  هستند. اگر مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  متر مربع باشد، محیط مربع  $MNPQ$  چقدر است؟ ؟





## ۴) ساده کردن رادیکال‌ها:

جمع و تفریق رادیکال‌ها: اگر قسمت رادیکال‌ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می‌توانیم آن‌ها را همانند عبارتهای جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$5\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$$

مانند:

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها: اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می‌توانیم آن‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

**نکته:** اگر رادیکال‌ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال‌ها را ضرب یا تقسیم می‌کنیم.

ساده کردن رادیکال‌ها: بعضی از رادیکال‌ها را می‌توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضریب بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

ریشه سوم

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2 \times 64} = 4\sqrt[3]{2}$$

ریشه سوم

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \times 27} = 3\sqrt[3]{3}$$

ریشه سوم

مانند:

گویا کردن مخرج کسره‌های رادیکالی: گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می‌کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

مانند:

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7}$$

$3 - 1 = 2$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

$3 - 2 = 1$

مانند:

? مثال: حاصل عبارت  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$  برابر ..... است.

? مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} =$$

? تست: حاصل  $\sqrt{32}$  برابر کدام گزینه است؟

- $4\sqrt{2}$  (۱)      □  $3\sqrt{2}$  (۲)      □  $8\sqrt{2}$  (۳)      □  $16$  (۴)

? مثال: حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

$$5\sqrt{2} - \sqrt{54} =$$

? مثال: حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$3\sqrt{54} - 2\sqrt{2} =$$

? مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$-3\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{75} =$$

? مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{20} - 7\sqrt{5} + \sqrt{45} =$$

? مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$

ب)  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

ج)  $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

د)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

ه)  $\frac{5}{\sqrt{3x}}$



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
Www.tadarokmath.ir  
یا به سایت  
وارد شوید

فصل ۵: عبارات جبری

(۱) عبارت جبری و مفهوم اتحاد:

عبارت جبری: عبارتی است که از اعداد و متغیر (حروف انگلیسی) تشکیل شده است.

یک جمله‌ای: عبارت جبری که از دو قسمت تشکیل شده است (متغیر و عدد) و بین آن‌ها علامتی نباشد. (ضرب است)

مانند:  $-4xy$  ,  $\frac{a}{3}$

**نکته:** فرم کلی یک جمله‌ای به صورت  $ax^n$  است که  $a$  عدد حقیقی و  $x$  متغیر و  $n$  عدد حسابی است.

**نکته:** هر عدد حقیقی به تنهایی یک جمله‌ای است. چون متغیر آن صفر است.

**نکته:** اگر در عبارتی حروف زیر رادیکال یا حروف در مخرج یا حروف توان منفی داشته باشند، آن عبارت یک جمله‌ای نیست.

درجه یک جمله‌ای: توان متغیر را درجه آن یک جمله‌ای می‌گویند.

یک جمله‌ای متشابه: یک جمله‌ای که متغیر و توان هر متغیر کاملاً مثل هم باشند.

مانند:  $(4xy, -3yx)$  متشابه‌اند ولی  $(5a^2b, 3ab^2)$  نامتشابه هستند.

**ضرب و تقسیم یک جمله‌ای:** در ضرب ضرایب در هم و متغیرها در هم ضرب می‌شوند و در تقسیم ضرایب بر هم و متغیرها بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال: عبارات جبری زیر را ساده کنید.

$$3a(-4ab - c) = -12a^2b - 3ac$$

$$\frac{24x^2y^3z}{3xyz} = 8axy^2$$

**چند جمله‌ای:**

از جمع و تفریق چند یک جمله‌ای یک عبارت چند جمله‌ای به وجود می‌آید.

**درجه چند جمله‌ای:** بزرگترین درجه نسبت به آن متغیر را در نظر می‌گیریم.

مثال: درجه نسبت به متغیر  $x$  در چند جمله‌ای  $\sqrt{5}x^2y^3z - 3xy + 2x^3y^2 - x$  چند است؟ درجه  $x$  برابر ۳ است.

(۲) اتحادهای جبری:

**اتحاد جبری:** اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای تمام مقادیر دلخواه برای متغیرها مقدار یکسانی داشته باشد به تساوی جبری آن‌ها اتحاد می‌گویند.

(۱) اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases} \quad \text{الف) جبری:}$$

ب) کلامی:  $(\text{جمله دوم})^2 + \text{دو برابر جمله اول در دوم} + (\text{جمله اول})^2 = (\text{جمله اول} + \text{جمله دوم})^2$

(۲) اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{الف) جبری:}$$

ب) کلامی:  $(\text{جمله دوم})^2 - (\text{جمله اول})^2 = (\text{جمله دوم} - \text{جمله اول})(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول})$



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

مثال: جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) درجه  $\lambda a^{\circ} x^{\circ}$  نسبت به متغیر  $x$  ، ..... است.

ب) ضریب عددی یک جمله‌ای  $-\frac{3x^2y^3}{4}$  عدد ..... است.

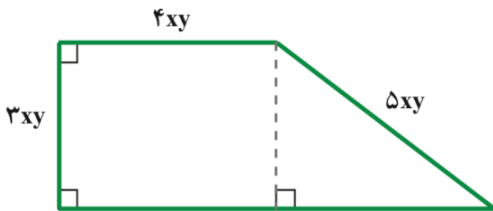
مثال: ساده شده عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $(-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3$

ب)  $2(5xy^4)^2(-2x^5y^7)$

پ)  $(2x^2y)(3x^2y^3) + xy^2(-5x^2y)$

مثال: محیط و مساحت شکل زیر را بیابید.



مثال: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

ب)  $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

الف)  $(-y - 2z)(-2z + y)$

ب)  $(x - 2y + 5)(x + 2y - 5)$

پ)  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

ت)  $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (۳) \text{ اتحاد جمله مشترک:}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (۴) \text{ مکعب دوجمله‌ای:}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \quad (۵) \text{ مربع سه جمله‌ای:}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \quad (۶) \text{ چاق و لاغر:}$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

(۳) تجزیه و کاربردها:

تجزیه عبارت جبری: نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب چند عبارت دیگر را تجزیه می‌گویند.

روش‌های تجزیه:

الف) فاکتورگیری

ب) با استفاده از اتحادها

فاکتورگیری: برای فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) (ب.م.م) ضرایب را تعیین می‌کنیم.

(۲) حروف مشترک با توان کمتر را انتخاب می‌کنیم.

(۳) (ب.م.م) و حروف مشترک را به عنوان فاکتور می‌گیریم.

(۴) تمام جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و جواب را داخل پرانتز می‌نویسیم.

تجزیه به کمک اتحاد مربع:

(۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد.

(۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق داشته باشند.

مثال: عبارات جبری زیر را تجزیه کنید. ?

$$\begin{array}{cc} a & 3 \\ \uparrow & \uparrow \\ a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2 \end{array}$$

جذر

$$\begin{array}{cc} 2x & y^2 \\ \uparrow & \uparrow \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 = (2x+y^2)^2 \end{array}$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

(۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد.

(۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق نداشته باشند.

(۳) ضریب x حاصل جمع و عدد آخر حاصل ضرب دو عدد را نشان می‌دهد.

مثال: عبارات جبری زیر را ساده کنید. ?

$$\begin{array}{l} \text{ضرب دو عدد} \\ \text{جمع دو عدد} \\ x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{جمع دو عدد} \\ \text{ضرب دو عدد} \\ x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) \end{array}$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

(۱) تعداد جملات ۲ جمله باشد.

(۲) جملات اول و دوم جذر دقیق داشته باشند.

(۳) بین جملات علامت منفی باشد.

مثال: عبارات جبری زیر را ساده کنید. ?

$$\begin{array}{cc} a & 3 \\ \uparrow & \uparrow \\ a^2 - 9 = (a-3)(a+3) \end{array}$$

جذر

$$\begin{array}{cc} x^2 & 4 \\ \uparrow & \uparrow \\ x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \end{array}$$

مثال: جاهای خالی را کامل کنید.  $(x + \dots)^2 = \dots + \dots + 9$

مثال: حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد بدست آورید.  $(x + 3)^2 =$

الف)  $(2x + y)^2 =$

ب)  $(x - 7)(x + 7) =$

الف)  $(x + 3)(x + 7)$

ب)  $(2xy - \frac{1}{4}x^2)^2$

پ)  $(x^2 - \frac{1}{4})^2$

ت)  $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2$

ث)  $(5 - 2\sqrt{2})^2$

مثال: تساوی را به کمک اتحاد کامل کنید.  $108 \times 92 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

الف)  $(x + 9)(x - \dots) = \dots - 81$

ب)  $x^2 + 3x - 18 = (x + \dots)(x - \dots)$

$x^2 - 6x + 8 =$

$x^2 + 12x + 36 =$

الف)  $25a^2 - 9b^2 =$

ب)  $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2$

پ)  $497 \times 503$

الف)  $2x^3 + 8x^2 + 8x$

ب)  $3a^2b - 12ab^2 + a^3b^2$

پ)  $a(x + 1) + b(x + 1)^2$

ت)  $a^3 - 2a^2 + a$

ث)  $x^2y^2 - 4xy + 4$

ج)  $25x^6 + 30x^3 + 9x^2$

چ)  $(2x + 1)^2 - y^2$

ح)  $1 - (3a + z)^2 = [1 - (\dots)] [1 + (\dots)]$

خ)  $x^6 - y^6$

د)  $(x + y)^2 - 9$

ذ)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$

(۳) نامعادله:

نامعادله: جواب‌های نامعادله مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن‌ها نامساوی برقرار است. همه‌ی جواب‌های نامعادله مجموعه جواب آن گفته می‌شود.

ویژگی‌های نامعادله:

(۱) اگر به طرفین یک نامساوی عدد اضافه یا عددی کم شود جهت نابرابری عوض نمی‌شود:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad , \quad a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

(۲) اگر طرفین یک نامساوی در عدد مثبت ضرب یا بر عدد مثبت تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض نمی‌شود:


$$a > b \xrightarrow{c>0} ac > bc \quad , \quad a > b \xrightarrow{c>0} \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

(۳) اگر طرفین یک نامساوی در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض می‌شود:

$$a < b \xrightarrow{c<0} ac > bc \quad , \quad a < b \xrightarrow{c<0} \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

حل نامعادله: همانند یک معادله حل می‌شود با این تفاوت که اگر در آخر نامعادله ضریب مجهول عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض می‌شود.

پس در حل نامعادله سعی کنید مجهول را همواره در طرفی قرار دهید که ضریبش مثبت باشد.

مثال:  مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بدست آورده و آن‌ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$4(x-1) \leq 5x-2 \Rightarrow 4x-4 \leq 5x-2 \Rightarrow 4x-5x \leq 4-2 \Rightarrow -x \leq 2 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\text{مجموعه جواب } A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$$



$$x^2 + \frac{x}{2} < (x-)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + 2x < 1 \Rightarrow x + 4x < 2 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

طرفین در ۲ ضرب

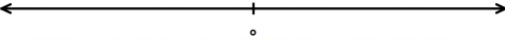
$$\text{مجموعه جواب } B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{5}\right\}$$



مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را بدست آورید. ?

$$4x - 3 \geq x - 15$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید، سپس مجموعه جواب آن را روی محور نشان دهید. ?

الف)  $\frac{x-3}{5} \leq \frac{x}{2}$  

ب)  $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$

ج)  $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

د)  $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$





(۱) معادله خط:

معادله خط: رابطه‌ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد.

**نکته:** فرم کلی معادله خط به صورت  $(y = ax + b)$  می‌باشد.

**نکته:** در صورتی که نمودار رابطه‌ی بین دو مقدار به صورت خط راست باشد، آن دو مقدار با هم رابطه خطی دارند.

? مثال: آیا رابطه بین یک ضلع مربع و محیط مربع رابطه‌ی خطی است؟ چرا؟ بله. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش محیط

انواع معادله خط:

- (۱) مبدأ گذر (فرم کلی:  $y = ax$ )
- (۲) غیر مبدأ گذر (استاندارد) (فرم کلی:  $y = ax + b$ )
- (۳) فرم گسترده  $y - y_0 = m(x - x_0)$
- (۴) فرم غیر استاندارد  $ax + by + c = 0$
- (۵) خطوط موازی با محور (فرم کلی:  $y = m$  ,  $x = n$ )

رسم یک خط: برای رسم یک خط در دستگاه مختصات نیاز به مختصات دو نقطه است.

**نکته:** اگر در فرم کلی (استاندارد) معادله خط عدد قبل از  $x$  عدد صحیح باشد در جدول به جای  $x$  اعداد (صفر و ۱) قرار می‌دهیم و عدد قبل از  $x$  عددی کسری باشد به جای  $x$  اعداد (صفر و مخرج کسر) قرار می‌دهیم.

**نکته:** شرط این که نقطه روی یک خط قرار گیرد این است که مختصات آن نقطه در معادله خط صدق کند. که برای این کار دو روش وجود دارد:

(۱) روش تحلیلی (جایگزینی مختصات نقطه در معادله خط)

(۲) روش ترسیمی

**نکته:** برای رسم معادلات خطی که به صورت  $(ax + by = c)$  هستند، در جدول یک بار به جای  $x$  و یک بار به جای  $y$  صفر قرار می‌دهیم.

(۲) شیب و عرض از مبدأ:

شیب خط: زاویه‌ای بین سمت راست محور طول‌ها با خط داده شده را می‌گویند.

عرض از مبدأ: نقطه‌ای که خط داده شده محور عرض‌ها را در آن نقطه قطع می‌کند را عرض از مبدأ می‌گویند.

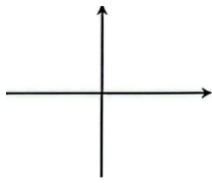
**نکته:** در فرم کلی معادله خط  $(y = ax + b)$  ضریب  $x$  یعنی عدد  $a$  شیب خط و عدد  $b$  عرض از مبدأ نام دارد.

مانند: در معادله خط  $y = -\frac{1}{3}x + 1$  عدد (شیب خط:  $-\frac{1}{3}$ ) و عدد (عرض از مبدأ: ۱) می‌باشد.

**نکته:** برای بدست آوردن شیب خط و عرض از مبدأ باید معادله خط به فرم کلی  $(y = ax + b)$  مرتب شود.

طول از مبدأ: نقطه‌ای که خط داده شده محور طول‌ها را در آن نقطه قطع می‌کند را طول از مبدأ می‌گویند.

**نکته:** برای بدست آوردن طول از مبدأ در معادله خط به جای  $y$  صفر قرار می‌دهیم.



مثال: خط  $y = -x + 1$  را در دستگاه مختصات رسم کنید.

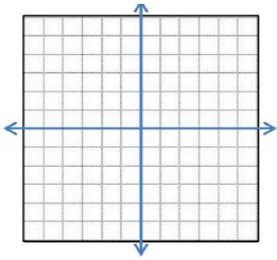
مثال: مختصات نقطه‌ای از خط بالا به طول ۳ را بنویسید.

مثال: معادله خط‌های زیر را رسم کنید.

۱)  $y = 3x - 1$

۲)  $x = -4$

x	
y	
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	



مثال: خط به معادله  $y = \frac{1}{2}x + 4$  را رسم کنید.

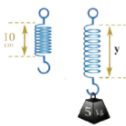
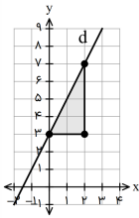
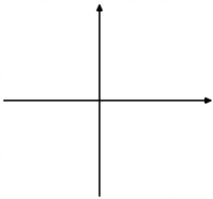
الف) آیا نقطه‌ی  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط است؟

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

پ) نقطه‌ای از این خط، به طول ۱- را پیدا کنید.

مثال: معادله خط  $2y - 4x - 6 = 0$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

مثال: با توجه به شکل مقابل معادله خط d را بنویسید.



مثال: طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه‌ی  $y = 0.8x + 10$  پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

مثال: شیب خط  $2y + 8x = -10$  برابر است با .....  
 (۱) -۴       (۲) +۴

تست: کدام نقطه روی خط  $y = -3x + 2$  قرار دارد؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$        (۲)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$        (۳)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$        (۴)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

تست: شیب خطی مثبت و عرض از مبدأ آن منفی است. این خط از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- (۱) اول       (۲) دوم       (۳) سوم       (۴) چهارم

تست: در کدام یک از خط‌های زیر شیب مثبت و عرض از مبدأ منفی است؟

- (۱)       (۲)       (۳)       (۴)

تست: کدام شکل می‌تواند نشان‌دهنده محل برخورد دو خط  $y = -x + 2$  و  $y = x + 1$  باشد؟

- (۱)       (۲)       (۳)       (۴)

**نکته:** دو خط در صورتی موازی هستند که شیب دو خط برابر باشند. مانند:  $(y = -3x, y = -3x + 5)$

**نکته:** دو خط در صورتی بر هم عمود هستند که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند یا حاصل ضرب دو شیب خط

### ۳) دستگاه معادلات خطی:

دستگاه معادلات خطی: برای حل دستگاه معادلات خطی از روش‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

**الف) روش حذفی:** در این روش یکی از متغیرها را حذف کرده سپس با جایگزینی متغیر دوم به دست می‌آید.

**?** مثال: دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش حذفی)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

$$7y = 7 \Rightarrow y = 1$$

$$2x + 3(1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

جواب دستگاه دو مجهولی  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

**ب) روش جایگزینی (تبدیلی):** در این روش یکی از معادلات را بر حسب یک متغیر مرتب کرده و مقدار آن را در معادله دوم قرار می‌دهیم.

**?** مثال: دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش جایگزینی)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3y + 7 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{7}{2} \\ -4(-\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}) + y = -7 \Rightarrow 6y - 14 + y = -7 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

(مقدار  $x$  را در معادله پایینی قرار می‌دهیم)

$$x = -\frac{3}{2}(1) + \frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x = 2$$

جواب دستگاه دو مجهولی  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

مثال: دو خط  $y = -2x + 1$  و  $y - 2x = 3$  با یکدیگر موازی‌اند.  درست  نادرست

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن  $-2$  باشد و از نقطه‌ی  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط  $y = -2x + 5$  موازی و از نقطه‌ی  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  عبور کند.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط  $2y = 6x - 8$  موازی باشد و از نقطه‌ی  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  بگذرد.

مثال: معادله خط راستی را بنویسید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ی  $4$  و محور طول‌ها را در نقطه  $-2$  قطع کرده باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

مثال: معادله خطی بنویسید که بر خط  $2x + 4y = 1$  عمود باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که موازی محور عرض‌ها باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  بگذرد.

مثال: از برخورد دو خط  $x = -3$  و  $y = 3$  کدام نقطه بدست می‌آید؟

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید. 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادلات خطی مقابل را حل کنید. 
$$\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادلات خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید. 
$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید. 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادله‌ی خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید. آیا این دستگاه جواب دارد؟ 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

شیب هر دو خط را بدست آورید. توضیح دهید چرا نقطه‌ی مشترکی به عنوان جواب معادله بدست نمی‌آید.

مثال: مجموع سن علی و پدرش  $70$  سال و اختلاف آن‌ها  $26$  سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات بدست آورید.



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

فصل ۷: عبارتهای گویا

(۱) عبارت گویا:

عبارت گویا: کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

**نکته:** عبارتی که متغیر آن توان منفی یا زیر رادیکال یا داخل قدر مطلق یا در مخرج کسر یا در توان باشد، گویا نیست.

مانند:  $|x-2|$ ,  $\frac{x^y}{3}$ ,  $\frac{4-\sqrt{x}}{3x}$

**نکته:** عبارت گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند تعریف نشده است.

**?** مثال: عبارتهای گویا زیر به ازای چه مقادیری از مخرج کسر تعریف نشده است.

(مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده تا مقادیر تعریف نشده مشخص شوند)

$$\frac{x^2-5}{2x-4} \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \quad (\text{عبارت گویا به ازای } (x=2) \text{ تعریف نشده است})$$

$$\frac{x-4}{x^2-4x} \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

(عبارت گویا به ازای  $(x=4, x=0)$  تعریف نشده است.)

(۲) ساده کردن عبارتهای گویا:

ساده کردن عبارت گویا: برای ساده کردن صورت و مخرج را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشته سپس عبارتهای مساوی را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

**نکته:** برای ساده کردن عبارتهای گویا از فاکتورگیری و اتحاد استفاده می‌کنیم.

**?** مثال: عبارتهای گویا زیر را ساده کنید.

اتحاد مزدوج

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{x(x+2)} = \frac{(x-2)}{x}$$

فاکتورگیری

اتحاد جمله مشترک

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} = \frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{(x-3)\cancel{(x-3)}} = \frac{(x-2)}{(x-3)}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

ضرب عبارتهای گویا: در ضرب عبارتهای گویا ابتدا ساده می‌کنیم سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می‌کنیم.

تقسیم عبارتهای گویا: ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم یعنی کسر اولی را رد معکوس کسر دومی ضرب می‌کنیم.

**?** مثال: حاصل ضرب و تقسیم عبارتهای گویا زیر را بدست آورید.

$$\frac{x+5}{3x+6} \times \frac{x+2}{x^2-25} = \frac{\cancel{(x+5)}}{3\cancel{(x+2)}} \times \frac{\cancel{(x+2)}}{(x-5)\cancel{(x+5)}} = \frac{1}{3(x-5)}$$

$$\frac{x^2-2x-15}{x+3} \div \frac{x^2-x-12}{2x+6} = \frac{(x-5)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}} \times \frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-4)\cancel{(x+3)}} = \frac{2(x-5)}{(x-4)}$$

$$\frac{5x+6}{3x-9}$$

مثال: به ازای چه مقادیری از  $x$ ، عبارت گویای مقابل تعریف نشده است؟

مثال: هر یک از عبارتهای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

۱)  $\frac{3x}{x^2+4}$

۲)  $\frac{x}{x^2-1}$

۳)  $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

مثال: در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف)  $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{\phantom{0000}}}{z(z^2+1)}$

ب)  $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{\phantom{0000}}}{x^2-x-6}$

پ)  $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (\boxed{\phantom{0000}})$

ت)  $\frac{(x-5)\boxed{\phantom{0000}}}{(x-2)(x-5)} = x+1$

مثال: عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف)  $\frac{3-x}{x^2-5x+6}$

ب)  $\frac{4x^2+8x}{12x+24}$

پ)  $\frac{24x^2}{12x^2-6x}$

ت)  $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y}$

ث)  $\frac{1-t^4}{t^2+1}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید و سپس تا حد امکان را ساده کنید. (مخرج کسر مخالف صفر فرض شده است).

$$\frac{x+2}{x} \times \frac{x^2}{x^2-4} =$$

مثال: ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه‌ی تمرین‌ها مخرج مخالف صفر فرض شده است)

الف)  $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ب)  $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{7-m}{m^2-1}$

پ)  $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x+18}$

ت)  $\frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2}$

## ۳) جمع و تفریق عبارتهای گویا:

جمع و تفریق عبارتهای گویا: بین مخرجها مخرج مشترک (ک.م.م) مخرجها را انتخاب می‌کنیم.

مثال: حاصل جمع و تفریق‌های زیر را بدست آورید.

$$\frac{2x+3}{x+1} + \frac{x-4}{x-2} = \frac{(2x+3)(x-2) + (x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x^2 - 4x - 10}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-9} = \frac{(x-1)(x+3) - (x+5)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+x-8}{(x-3)(x+3)}$$

ساده کردن عبارتهای مرکب: عبارت صورت کسر و عبارت مخرج کسر را جداگانه جواب داده و در آخر حاصل عبارت صورت را بر حاصل عبارت مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3-4x+x^2}{x^2}}{\frac{x^2-6-x}{x^2}} = \frac{(x-3)(x-1)}{x^2} \times \frac{x^2}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-1)}{(x+2)}$$

## ۴) تقسیم چند جمله‌ای‌ها:

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای: (۱) علامتها در هم ضرب شده

(۲) اعداد با هم ساده می‌شوند

(۳) حروف (متغیرها) با هم ساده می‌شوند

(در ساده کردن متغیرها از قاعده تقسیم اعداد توان‌دار استفاده می‌شود.)

مثال: عبارت گویا زیر را ساده کنید. ?

$$\frac{-18x^5y^2z^6}{12x^3y^2z^6} = \frac{-18}{12} \times \frac{x^5}{x^3} \times \frac{y^2}{y^2} \times \frac{z^6}{z^6} = -\frac{3x^2}{2y}$$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای: تک‌تک جملات صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می‌کنیم.

مثال: عبارت گویا زیر را ساده کنید. ?

$$\frac{4x^5 - 6x^3 + 12x}{2x} = \frac{4x^5}{2x} - \frac{6x^3}{2x} + \frac{12x}{2x} = 2x^4 - 3x^2 + 6$$

تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای: برای این تقسیم مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

(۱) ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد یعنی از بیشترین توان به کمترین توان می‌نویسیم.

(۲) اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می‌نویسیم.

(۳) خارج قسمت را در تک‌تک جملات مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را زیر عبارت مقسوم نوشته و دو عبارت را از هم کم می‌کنیم.

(۴) برای چند جمله‌ای به دست آمده مراحل ۲ و ۳ را تکرار کنیم و این تکرار را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

مثال: خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم  $4x - x^2 + 7 + 2x^2 \div x - 2$  را بدست آورید. ?

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 7 \quad |x-2 \\ -(x^2 - 2x) \quad |x+6 \\ \hline 6x + 7 \\ -(6x - 12) \\ \hline 19 \end{array}$$

خارج قسمت  $|x+6|$  باقی‌مانده  $|19|$

مرحله اول (استاندارد کردن عبارت):  $4x - x^2 + 7 + 2x^2 = x^2 + 4x + 7$

مرحله دوم (تقسیم مقسوم بر مقسوم علیه):  $\frac{x^2}{x} = x$

مرحله سوم (حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه):  $x(x-2) = x^2 - 2x$

رابطه تقسیم:  $(x-2)(x+6) + 19 = x^2 + 4x + 7$

$$\frac{5x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} =$$

مثال: حاصل جمع عبارت زیر را به دست آورید. (مخرجها مخالف صفر فرض شده است.)

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف)  $\frac{3x-2}{x+y} + \frac{x-3}{x+y} =$

ب)  $\frac{3-x}{x^2-5x+6}$

پ)  $\frac{4x^2+8x}{12x+24}$

ت)  $\frac{24x^2}{12x^2-6x}$

ث)  $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y}$

ج)  $\frac{1-t^4}{t^2+1}$

چ)  $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} =$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف)  $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a}$

ب)  $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

مثال: تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 21x + 1 \\ \hline x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 7x - 10 \\ \hline 3x - 1 \end{array}$$

مثال: خارج قسمت و باقیمانده‌ی تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$\begin{array}{r} -3x^4 + 4x^2 + x^2 + 5 \\ \hline 1 - x^2 \end{array}$$



**نکته:** اگر در تقسیم دو عبارت باقی مانده صفر شود، مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

روش تقسیم ذهنی تدارک! (برای علاقه‌مندان)

? مثال: مقدار  $a$  را طوری بیابید که چندجمله‌ای  $x^3 - 3x^2 + a - 3$  بر  $x^2 - 5$  بخش‌پذیر باشد.

? مثال: حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با  $2x^3 + 15x^2 + 28x$  است. اگر ارتفاع این جعبه  $x$  و طول آن  $x + 4$  باشد، عرض آن را بدست آورید.

? مثال: تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \hline x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^2 - 5x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 - x^4 + x^2 - 4x + 1 \\ \hline x - 1 \end{array}$$



برای مشاهده حل تصویری سوالات  
بارکد مقابل را اسکن کنید  
یا به سایت [www.tadarokmath.ir](http://www.tadarokmath.ir)  
وارد شوید

فصل ۸: حجم و مساحت

(۱) حجم کره و استوانه:

حجم: مقدار فضایی را که یک جسم اشغال می‌کند حجم (گنجایش) نام دارد و حجم را با حرف انگلیسی (V) نشان می‌دهند.

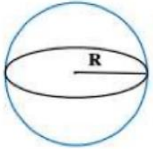
انواع حجم: (۱) حجم منشوری (۲) حجم هرمی یا مخروطی (۳) حجم کروی

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع دایره) می‌گویند.

**نکته:** دایره را به اختصار به صورت  $C(O, R)$  نشان می‌دهند.  
شعاع  
مرکز  
دایره

کره: مجموعه نقاطی از فضا که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع کره) می‌گویند.

مانند: کره زمین و توپ



فرمول مساحت کره:  $S = 4\pi R^2$

فرمول حجم کره:  $v = \frac{4}{3}\pi R^3$

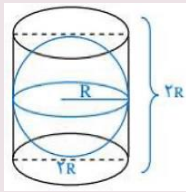
**?** مثال: حجم و مساحت کره با قطر ۴ سانتی‌متر را بدست آورید.

شعاع کره  $4 \div 2 = 2$

$$\begin{cases} v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 8 = \frac{32}{3}\pi \\ S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 2^2 = 16\pi \end{cases}$$

$$\frac{v}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{3}R$$

**?** مثال: نسبت عددی حجم کره به مساحت کره چند است؟



**نکته:** اگر کره به طور کامل داخل استوانه قرار گیرد، می‌گوییم کره بر استوانه محاط شده و استوانه بر کره محیط شده است.

شعاع کره  $6 \div 2 = 3 \text{ cm}$

**?** مثال: کره‌ای در استوانه‌ای به قطر ۶ سانتی‌متر محاط شده است:

الف) حجم کره را بدست آورید.

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 36\pi \text{ cm}^3$$

ب) حجم استوانه را بدست آورید.

$$v = S \times h = (\pi \times 3^2 \times 6) = 54\pi \text{ cm}^3$$

پ) حجم فضای بین کره و استوانه را بدست آورید.

$$54\pi - 36\pi = 18\pi \text{ cm}^3$$

**نکته:** از دوارن نیم دایره حول قطر، کره حاصل می‌شود.

**نکته:** از دوارن ربع دایره حول شعاع، نیم کره حاصل می‌شود.

**نکته:** برای بدست آوردن حجم نیم کره می‌توان از رابطه‌ی  $v = \frac{2}{3}\pi R^3$  استفاده کرد.

**?** مثال: حجم حاصل از دوارن ربع دایره حول شعاع ۴ سانتی‌متر را بدست آورید. (بر حسب  $\pi$ )

( از دوارن ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می‌شود )

$$v = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \times 4^3 = \frac{128}{3}\pi$$

**نکته:** اگر شعاع کره را  $n$  برابر کنیم مساحت کره  $n^2$  و حجم کره  $n^3$  برابر خواهد شد.

**?** مثال: اگر شعاع کره‌ای را ۴ برابر کنیم مساحت و حجم کره چند برابر خواهد شد؟

برابر  $S = n^2 = 4^2 = 16$

برابر  $v = n^3 = 4^3 = 64$

? مثال: از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن، ..... تشکیل می‌شود.

? تست: مساحت یک نیمکره توپر چوبی به شعاع R کدام گزینه است؟

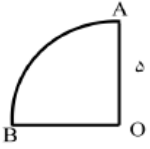
- (1)  $4\pi R^2$       (2)  $3\pi R^2$       (3)  $2\pi R^2$       (4)  $\frac{4}{3}\pi R^2$

? مثال: کره‌ای به شعاع 3cm داریم:

الف) حجم کره را بدست آورید.

ب) مساحت کره را بدست آورید.

? مثال: حجم حاصل از دوران ربع دایره مقابل به شعاع 5cm را حول شعاع OA بدست آورید. ( $\pi = 3$ )

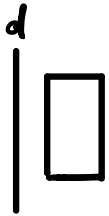


? مثال: مساحت کره‌ای به قطر 12cm را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است و پاسخ را بر حسب  $\pi$  بنویسید.)

? مثال: کره‌ای به شعاع R درون استوانه‌ای محاط شده است. ادعای دو دانش‌آموز زیر را خوانده و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص نمایید. (درست را با علامت  و نادرست را با علامت )

میینا: حجم این استوانه برابر  $2\pi R^3$  است.

یکتا: حجم فضای خالی بین استوانه و کره، برابر با حجم نیمکره‌ای به شعاع R است.



? مثال: از دوران شکل روبه‌رو حول خط d چگونه جسمی ایجاد می‌شود؟ آن را رسم کنید.

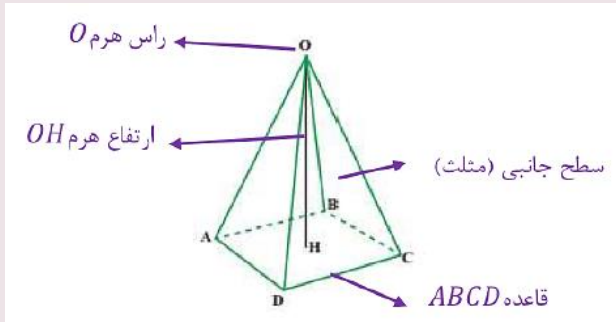
? مثال: اگر کره‌ای در استوانه‌ای محاط شده باشد حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

? مثال: اگر مساحت و حجم کره‌ای از نظر عددی برابر باشند، شعاع کره چند است؟

## ۲) حجم مخروط و هرم:

هرم: شکل فضایی که سطح جانبی آن مثلث و وجه زیرین (قاعده) آن چند ضلعی محدب باشد.

**نکته:** به فاصله رأس هرم تا قاعده، ارتفاع هرم می‌گویند.



حجم هرم: الف) کلامی: ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده  $\times \frac{1}{3}$  = حجم هرم

ب) جبری:  $v = \frac{1}{3} S \cdot h$

**?** مثال: حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به ضلع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۶ سانتی‌متر را بدست آورید.

$$v = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 6 = 50 \text{ cm}^3 \quad (\text{خودش} \times \text{یک ضلع} = S \text{ مربع})$$

**?** مثال: قاعده لوزی با قطرهای ۶ و ۸ سانتی‌متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی‌متر باشد، حجم هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

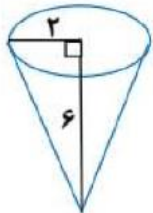
$$v = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \left( \frac{6 \times 8}{2} \right) \times 5 = 40 \text{ cm}^3 \quad (S = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{2} \text{ لوزی})$$

**نکته:** اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع یکسان باشند، دارای حجم برابر هستند.

حجم مخروط: الف) کلامی: ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده  $\times \frac{1}{3}$  = حجم مخروط

ب) جبری:  $v = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

**?** مثال: حجم مخروط زیر را حساب کنید.



$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 6 = 25.12 \text{ cm}^3$$



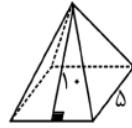
مثال: تعداد وجه‌های جانبی هرم منتظم مقابل برابر ..... است.

مثال: حجم هرمی را بدست آورید که قاعده آن مستطیل به اندازه ۵ و ۹ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰cm باشد.

مثال: حجم یک هرم ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب است. اگر مساحت قاعده‌ی این هرم ۳۰ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی ارتفاع این هرم را بدست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است.)

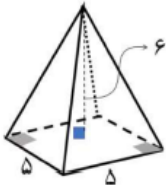
مثال: اگر مکعب و هرمی دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم هرم چند برابر حجم مکعب است؟

مثال: گسترده یک هرم منتظم را رسم کنید که قاعده‌ی آن سه ضلعی باشد.

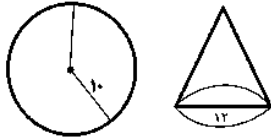


مثال: مساحت جانبی هرم منتظم زیر را محاسبه کنید.

مثال: قاعده یک هرم، مربعی به ضلع ۵ سانتی‌متر است. اگر ارتفاع هرم ۶ سانتی‌متر باشد، حجم آن را بدست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است.)

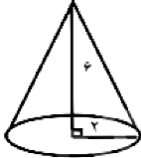


مثال: با قسمتی از یک دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر ساخته‌ایم. ارتفاع مخروط را بدست آورید.



مثال: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۹ سانتی‌متر را حساب کنید. (نوشتن فرمول الزامی است.)

مثال: حجم مخروطی به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ را بدست آورید. ( $\pi = 3$ )



مثال: ارتفاع یک هرم (با قاعده مربع شکل) نصف ارتفاع یک مخروط است. شعاع قاعده مخروط ۴ سانتی‌متر و حجم آن ۳۲ سانتی‌متر مکعب باشد. اگر ضلع مربع قاعده هرم ۶ سانتی‌متر باشد حجم هرم را بدست آورید. (راهنمایی: کشیدن شکل مناسب به درک مسئله کمک می‌کند)



مثال: یک اسفنج مکعب شکل را مانند شکل مقابل بریده‌ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟

مثال: طرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه‌ی ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده‌ی آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

مثال: با  $\frac{3}{4}$  دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

مثال: گنجایش مخروطی ۴۷۱۰۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ۳ متر باشد ارتفاع مخروط چند متر است؟

$$47100 \div 1000 = 47.1 \text{ m}^3 \quad \text{حجم مخروط} \quad (\text{هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.})$$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow 47.1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times h \Rightarrow h = \frac{47.1}{\pi} = 15 \text{ m}$$

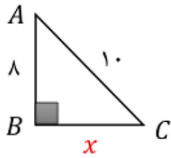
**نکته:** از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائم آن مخروط حاصل می‌شود. ضلعی که دوران روی آن انجام شده است، ارتفاع مخروط و ضلع دیگر، شعاع قاعده نام دارد.

مثال: مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۴ و ۹ سانتی‌متر را روی ضلع بزرگتر دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟



$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9 = 150.72 \text{ cm}^3$$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه ABC را روی حول ضلع AB دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید.



شعاع قاعده : رابطه فیثاغورث  $x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow x = 6$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 301.44 \text{ cm}^3$$

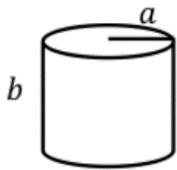
**نکته:** از دوران مستطیل و مربع حول یک ضلع آن، استوانه تشکیل می‌شود.

**نکته:** مساحت جانبی و مساحت کل استوانه از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S = p \times h \quad \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$S = S_{\text{قاعده}} + S_{\text{جانبی}} \Rightarrow \text{مساحت کل} = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی}$$

مثال: نسبت حجم به مساحت کل استوانه‌ای را بدست آورید که شعاع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد.



$$v = S \times h = (a \times a \times \pi) \times b = \pi a^2 b$$

$$S_{\text{جانبی}} = s \times h = (2 \times a \times \pi) \times b = 2\pi ab$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{قاعده}} + S_{\text{جانبی}} = 2\pi ab + 2a^2\pi = 2\pi a(b + a)$$

$$\frac{v}{S} = \frac{\pi a^2 b}{2\pi a(b + a)} = \frac{ab}{2(a + b)}$$

مثال: از دوارن مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، شکل ..... تصور می‌شود.

- الف) استوانه       ب) مخروط

مثال: از یک مقوا به ضلع  $a$  گوشه‌های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین  $x$  و  $a$  باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع  $x$  داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره‌ی مجاورش و به دیواره‌ی جعبه مماس باشد؟

